Leibniz

Apuntes

Matemáticas 2º de bachillerato

Tema 7

La integral indefinida

$$\int 6x^2\,dx$$

7.1 Introducción

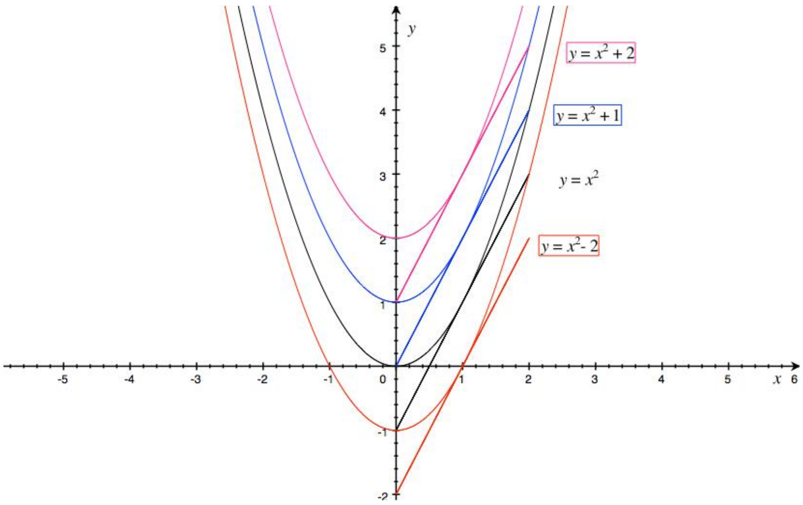
Def.: Dadas dos funciones, F(x) y f(x), si se verifica que: F´(x) = f(x), para un cierto intervalo de x, entonces se dice que F(x) es una **función primitiva** de f(x) para ese determinado intervalo. Dos primitivas cualesquiera de f(x) difieren en una constante.

Def.: El conjunto de todas las funciones primitivas de una función es la **integral indefinida** de esa función. Si se cumple que F´(x) = f(x):

F(x)	es una primitiva de f(x)
F(x) + C	es la integral indefinida de f(x)

La integral indefinida es una familia de funciones, cuyas gráficas son paralelas ($\Rightarrow$ por tener todas para cada x la misma pendiente), pero desplazadas a lo largo del eje OY, según sea el valor de la constante C. Se escribe:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$



A f(x) se le llama función subintegral o **integrando**, F(x) + C es la **solución general**, siendo C la **constante de integración**. Para cada valor de C se obtiene una primitiva de f(x) o **solución particular** de la integral. La **diferencial de x**, dx, indica que x es la variable de integración.

Propiedades:

1ª: La derivada de la integral de una función respecto a la misma variable es la misma función.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

2ª: La integral de una suma de varias funciones integrables es igual a la suma de las integrales de cada una de las funciones.

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

3ª: La integral del producto de una constante por una función integrable es igual al producto de la constante por la integral de la función.

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)dx$$

7.2 Integrales inmediatas

El gran problema del cálculo integral consiste en reconocer de qué función es derivada la que nos encontramos en el integrando. En algunos casos, es sencillo reconocerlo; nos encontramos entonces ante las **integrales inmediatas**, que se resuelven aplicando los resultados de las tablas. En el caso de que la función primitiva no se reconozca con tanta facilidad, tendremos que recurrir a los **métodos de integración**, que son procedimientos que permiten transformar un integrando que no es inmediatamente integrable, en otro que sí lo es.

1. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$
2. $\int k \cdot f'(x)\,dx = k \cdot f(x) + C$
3. $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$
4. $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^m} = \frac{-1}{(m-1)[f(x)]^{m-1}} + C$
5. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + C$
6. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \mathrm{Ln}\,|f(x)| + C$
7. $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$
8. $\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\mathrm{Ln}\,a} + C$
9. $\int \cos f(x) \cdot f'(x)\,dx = \mathrm{sen}\, f(x) + C$
10. $\int \mathrm{sen}\, f(x) \cdot f'(x)\,dx = -\cos f(x) + C$
11. $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \int [1 + \mathrm{tg}^2 f(x)] \cdot f'(x)\,dx = \mathrm{tg}\, f(x) + C$
12. $\int \frac{f'(x)}{\mathrm{sen}^2 f(x)}\,dx = \int [1 + \mathrm{cotg}^2 f(x)] \cdot f'(x)\,dx = -\mathrm{cotg}\, f(x) + C$
13. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}\,dx = \mathrm{arcsen}\, f(x) + C$
14. $\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}\,dx = \mathrm{arctg}\, f(x) + C$

$$\mathrm{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad\qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Ejemplos de integrales inmediatas:

1. $\int 3 \, dx =$
2. $\int 5x^2 \, dx =$
3. $\int 7e^x \, dx =$
4. $\int \frac{1}{x^2} \, dx =$
5. $\int \sqrt[3]{x} \, dx =$
6. $\int \frac{4}{\sqrt[3]{x}} \, dx =$
7. $\int (2x + \cos x) \, dx =$
8. $\int (3x^2 + \sec^2 x) \, dx =$
9. $\int (3x^2 - x - 2)^2 \, dx =$
10. $\int (2x + 1)^4 \, dx =$
11. $\int (2x + 4)(x^2 + 4x + 1)^7 \, dx =$
12. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx =$
13. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \, dx =$
14. $\int \cos(2x + 1) \, dx =$
15. $\int x \cos(x^2 + 1) \, dx =$
16. $\int \frac{2x + 8}{x^2 + 8x + 7} \, dx =$
17. $\int \frac{7\cos(7x + 2)}{\operatorname{sen}(7x + 2)} \, dx =$
18. $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} \, dx =$
19. $\int e^x \cos e^x \, dx =$
20. $\int e^{3x + 4} \, dx =$
21. $\int 6x \, e^{3x^2 + 7} \, dx =$
22. $\int 2^{7x - 4} \, dx =$
23. $\int (3x^2 - 4) \, 2^{x^3 - 4x} \, dx =$
24. $\int \operatorname{sen}(7x + 8) dx =$
25. $\int 3 \sec^2 x \, dx =$
26. $\int \frac{7}{\cos^2 x} \, dx =$
27. $\int (5 + 5\operatorname{tg}^2 x) dx =$
28. $\int \frac{8}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx =$
29. $\int 3 \operatorname{cosec}^2 x \, dx =$
30. $\int \frac{5}{\sqrt{5x + 3}} \, dx =$
31. $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 + 5x - 3}} \, dx =$
32. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \, dx =$
33. $\int \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}} \, dx =$
34. $\int \frac{1}{3 + 3x^2} \, dx =$
35. $\int \frac{1}{1 + 9x^2} \, dx =$
36. $\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} \, dx =$

7.3 Integrales que se reducen a inmediatas

Con ayuda de algunos trucos es posible reducir muchas integrales a inmediatas. Generalizando, los trucos consisten en descomponer un polinomio en sus distintos monomios, en reescribir la función en forma de potencia con exponente fraccionario, en multiplicar y dividir por la misma expresión, en sumar y restar la misma cantidad, en multiplicar por una expresión que resulte la unidad (sen^2 x + $\cos^2$ x), en sustituir una expresión por otra equivalente, incluso en realizar una división polinómica.

Ejemplos de integrales con trucos:

1. $\int \frac{5x^2 + 3x - 6}{x^2}\, dx =$
2. $\int \frac{x^4}{x^2 + 1}\, dx =$
3. $\int \frac{dx}{\mathrm{sen}^2 x \cos^2 x} =$
4. $\int \cos^2 x\, dx =$
5. $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx =$
6. $\int \sec^4 x\, dx =$
7. $\int \frac{dx}{3 + x^2} =$

7.4 Métodos de integración

7.4.1 Integrales del tipo arcsen x

Se trata de ir transformando el radicando hasta obtener una expresión del tipo 1 – f^2 (x), como veremos en los ejemplos a continuación. Realmente se puede considerar un caso concreto de integrales que se reducen a inmediatas.

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}\, dx = \mathrm{arcsen}\, f(x) + C$$

Ejemplo: $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^6}}\, dx =$

Ejemplo: $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x^2}} =$

7.4.2 Integrales del tipo arctg x

Se trata de ir transformando el denominador hasta obtener una expresión del tipo 1 + f^2 (x), como veremos en los ejemplos a continuación. Realmente se puede considerar un caso concreto de integrales que se reducen a inmediatas. Sólo se podrá dar este caso si las raíces del denominador son imaginarias.

$$\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$$

Ejemplo: $\int \frac{1}{1 + 4x^2}\,dx =$

Ejemplo: $\int \frac{1}{4 + 5x^2}\,dx =$

Ejemplo: $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\,dx =$

Ejemplo: $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 11}\,dx =$

7.4.3 Integración de funciones racionales

Antes de distinguir los casos en función del grado del denominador y del tipo de raíces que este tenga, hay que dejar claro que lo primero que se hará siempre, en caso de que el grado del numerador sea igual o mayor que el grado del denominador, es dividir polinómicamente y expresar la división como cociente más resto entre divisor, como se indica en el ejemplo a continuación. Con esto conseguimos que el grado del numerador sea siempre menor que el del denominador.

Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, siempre realizaremos la división polinómica.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +2x^2 & +7x & & x^2+3 \\ \cline{5-5}
-x^3 & & -3x & & x+2 \\ \cline{1-3}
 & 2x^2 & +4x & & \\
 & -2x^2 & & -6 & \\ \cline{2-4}
 & & 4x & -6 &
\end{array}$$

$$\frac{x^3+2x^2+7x}{x^2+3} = x+2+\frac{4x-6}{x^2+3}$$

7.4.3.1 Integración de funciones racionales con denominador de primer grado

Suponemos que el numerador es un polinomio de grado inferior al del denominador. En caso contrario, se realiza la división polinómica y obtendremos un polinomio - cociente y una función racional, en la que el grado del numerador sí que es menor que el del denominador.

Ejemplo 1: $\int \frac{3x+2}{x-2}\, dx =$

Ejemplo 2: $\int \frac{7}{3x+5}\, dx =$

7.4.3.2 Integración de funciones racionales con denominadores de segundo grado

Suponemos que el numerador es un polinomio de grado inferior al del denominador. En caso contrario, se realiza la división polinómica y obtendremos un polinomio - cociente y una función racional, en la que el grado del numerador sí que es menor que el del denominador.

Si el denominador es de segundo grado, nos encontramos los siguientes casos:

a) que tenga dos raíces reales distintas (Ejemplos 1 y 2)
b) que tenga una raíz real doble (Ejemplo 3)
c) que tenga dos raíces imaginarias conjugadas (Ejemplo 4)

Ejemplo 1: $\int \frac{4x^3 + 6x^2 - 3x - 4}{x^2 - 2x - 3}\, dx =$

Ejemplo 2: $\int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}\, dx =$

Ejemplo 3: $\int \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 4}\, dx =$

Ejemplo 4: $\int \frac{2x + 3}{2x^2 + 2x + 1}\, dx =$

Ejercicios:

1. $\int \frac{dx}{x^2 - 4} =$
2. $\int \frac{-3x + 1}{x^2 - x + 1}\, dx =$
3. $\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8}\, dx =$
4. $\int \frac{2}{x^2 - 2x + 5}\, dx =$

7.4.4 Integración por sustitución o cambio de variable

El papel de la sustitución en la integración es el equivalente a la regla de la cadena en la derivación. Recuérdese que para las funciones derivables dadas por y = F(u) y u = t(x), la regla de la cadena establece que:

$$\frac{d}{dx}[F(t(x))] = F'\big(t(x)\big) \cdot\ t'(x)$$

Integrando la expresión anterior, obtenemos:

$$\int F'\big(t(x)\big) \cdot t'(x)\ dx = F\big(t(x)\big) + \ C = F(u) + \ C$$

Ejemplos: En el caso de las funciones sencillas no tenemos que aplicar este método, ya que la tabla viene preparada con las derivadas internas (f´(x)).

a) $\int 5\sqrt{5x\ +\ 1}\ dx =$

b) $\int x\,(x^2\ +\ 1)^3\ dx =$

En otro tipo de ejercicios es más cómodo realizar la sustitución como realizaremos en el ejemplo a continuación.

Ejemplo: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-\ \sqrt{x})} =$

Sust.: $\sqrt{x} = t$

$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \ \Leftrightarrow\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\ dt$

Ejercicios:

1. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} =$

2. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} =$

3. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}\, dx =$

4. $\int \frac{\ln x^2}{x}\, dx =$

5. $\int \frac{dx}{x \operatorname{Ln} x \operatorname{Ln} (\operatorname{Ln} x)} =$

6. $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx =$

7. $\int \operatorname{cotg} x\, [\operatorname{Ln} (\operatorname{sen} x)]^2\, dx =$

8. $\int \frac{5^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx =$

9. $\int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}\, dx =$

10. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx =$

11. $\int \frac{x}{1 + \sqrt{x}}\, dx =$

12. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} =$

7.4.5 Integración por partes

Este método de integración se obtiene de la regla de derivación de un producto:

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{d}{dx}(u) \cdot v + u \cdot \frac{d}{dx} v$$

Despejando el último sumando e integrando hacia x toda la expresión, resulta:

$$\int u \frac{dv}{dx}\, dx = \int \frac{d}{dx}(u \cdot v)\, dx - \int v \frac{du}{dx}\, dx$$

y simplificando:

$$\boxed{\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du}$$

Existe una regla nemotécnica para la fórmula de la integración por partes:

"**u**n **d**ía **v**i **u**n **v**iejo **v**estido **d**e **u**niforme"

Ejemplo: $\int x \cdot \cos x\, dx =$

$u = x \Rightarrow du = dx$
$dv = \cos x\, dx \Rightarrow v = \int dv = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$

1. $\int \operatorname{Ln} x\, dx =$
2. $\int \cos^2 x\, dx =$
3. $\int \operatorname{arcsen} x\, dx =$
4. $\int e^x \cdot \cos 2x\, dx =$
5. $\int \frac{x\, e^x}{(x+1)^2}\, dx =$
6. $\int x^2 \operatorname{Ln} x\, dx =$
7. $\int 2x^2 \cdot \operatorname{sen} x\, dx =$
8. $\int e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x\, dx =$

7.4.6 Integración de funciones trigonométricas, del tipo R(sen x, cos x)

R es una función racional (sumas, productos y cocientes) de senos y cosenos.

7.4.6.1 R es impar en seno: R (- sen x, cos x) = - R(sen x, cos x)

Se realizará el cambio de variable cos x = t

Ejemplo: $\int \frac{\text{sen x}}{1+\cos^2 x}\,dx =$

7.4.6.2 R es impar en coseno: R (sen x, - cos x) = - R(sen x, cos x)

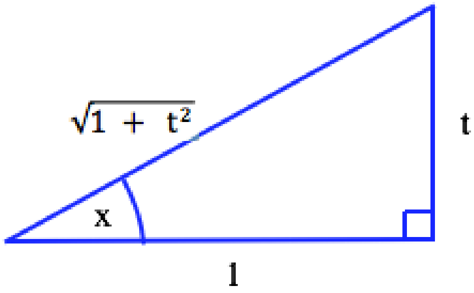
Se realizará el cambio de variable sen x = t

Ejemplo: $\int \frac{dx}{\cos x} =$

7.4.6.3 R es par en seno y coseno: R (- sen x, - cos x) = R (sen x, cos x)

Se realizará el cambio tg x = t

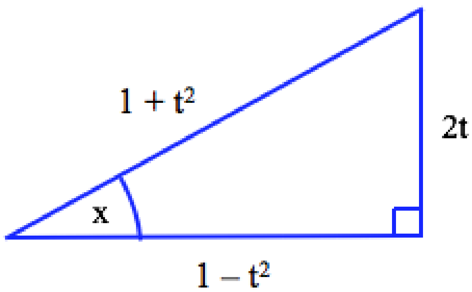
$$\begin{cases} dx = \dfrac{dt}{1 + t^2} \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \end{cases}$$



Ejemplo: $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} =$

7.4.6.4 Para el resto de casos se podrá aplicar la sustitución universal: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

$$\begin{cases} dx = \dfrac{2\,dt}{1 + t^2} \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1 + t^2} \\ \cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{cases}$$



Ejemplo: $\int \frac{3\,dx}{1-\operatorname{sen} x} =$

Ejercicios:

1. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx =$
2. $\int \cos^3 x\, dx =$
3. $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx =$
4. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx =$
5. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx =$

Ejercicios

1. Determina la función primitiva de $f(x) = 2x + 1$ que pasa por el punto P(1, 5).

2. Determina una función cuya derivada sea $f(x) = 3x^2 + \cos x$ que cumpla que cuando $x = 0$, y también valga 0.

3. Halla la familia de curvas en las que la pendiente de las rectas tangentes a dichas curvas en cualquier punto viene dada por la función $y = x\cdot e^{2x}$. Obtén, de esa familia, la curva que pasa por A(0,2).

4. Realiza las siguientes integrales:

a) $\int \frac{\sqrt{x}+3x^{-2}-4}{x^3}dx$

b) $\int \frac{3x}{x+5}dx$

c) $\int \frac{4x^5+2x^3-4x+1}{x^2}dx$

d) $\int 2x\sqrt{x^2-3}dx$

e) $\int \frac{3x}{x^4+2}dx$

f) $\int \frac{x^3}{x-2}dx$

g) $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x dx$

h) $\int \frac{x^3+4x^2-10x+7}{x^3-7x+6}dx$

i) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx$

j) $\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}dx$

k) $\int \frac{x^3+22x^2-12x+8}{x^4-4x^2}dx$

l) $\int \frac{5x+2}{x^2-6x+12}dx$

m) $\int x\sqrt{x+1}dx$

n) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$

o) $\int x^2\cdot 2^{-x}dx$

p) $\int \frac{dx}{x-\sqrt[4]{x}}$

q) $\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

r) $\int x^2\cos\frac{x}{3}dx$

s) $\int \operatorname{arctg}(3x)dx$

t) $\int \frac{\sqrt{e^x}}{1-\sqrt{e^x}}dx$

u) $\int \frac{2}{x^2+2x+9}dx$

v) $\int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}dx$

w) $\int e^{-2x}\cos 3x dx$

x) $\int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}dx$

y) $\int \frac{x^2}{x^3+2x^2+x}dx$

z) $\int (x+2)\cdot \operatorname{Ln}(x+1)dx$

aa) $\int \operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^3 x dx$

ab) $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x}dx$

ac) $\int \frac{5x}{x^4+3}dx$

ad) $\int \operatorname{sen}^3 x\cdot\cos^3 x dx$

Ejercicios PAU

1. $\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}dx$ (Junio 2013)

2. a) $\int 5\sqrt[3]{x} - 3x^3 + \frac{2}{x^2}dx$ b) $\int \frac{5}{(2x-3)^2+9}dx$ (Junio 2012)

3. $\int xLnxdx$ (Junio 2011)

4. $\int \frac{x^2+3}{x^2-2x}dx$ (Sept 2010)

5. a) $\int (2x-1)Lnxdx$ b) $\int \frac{1-x}{1+4x^2}dx$ (Sept 2008)

Ficha de Repaso

1. $\int \frac{2x-3}{x+2}dx$ — I = 2x – 7 Ln (x + 2) + C

2. $\int \frac{1+senx}{1-senx}dx$ — I = 2 tgx + 2/cosx – x + C

3. $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$ — I = x – arctg x + C

4. $\int 7^{2x-5}dx$

5. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$ — I = x^3/3 – x + arctg x + C

6. $\int x^2\cos 2x dx$ — I = (x^2sen2x + xcos2x – ½·sen2x)·1/2 + C

7. $\int \frac{1}{(x-1)\cdot(x+3)^2}dx$ — I = $\frac{1}{4(x+3)} + \frac{Ln(x-1)}{16} - \frac{Ln(3+x)}{16} + C$

8. $\int x\cdot 2^{-x}dx$ — I = - x·2^{-x}/Ln2 – 2^{-x}/$(\text{Ln}2)^2$ + C

9. $\int \frac{x-1}{x^2+4x+6}dx$ — I = $\frac{1}{2}\left[Ln(x^2+4x+6) - 3\sqrt{2}arctg\,\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right]$

10. $\int xe^{4x}dx$ — I = $\frac{xe^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + C$

11. $\int sen^3 x dx$ — I = $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$

12. $\int \frac{sen^3 x}{\cos^2 x}dx$ — I = 1/cosx + cos x + C

13. $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$ — I = $2\cdot\left[\frac{\sqrt{x^3}}{3} - x/2 + \sqrt{x} - Ln(1+\sqrt{x})\right] + C$

14. $\int \sqrt{e^x - 1}dx$ — I = $2\cdot(\sqrt{e^x-1} - arctg\sqrt{e^x-1})$ + C

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-Lnx}}dx$

16. $\int \frac{3x^2-7x+4}{2x-3}dx$ I = $x^2 - 7x - 17/2 \cdot Ln(2x-3) + C$

17. $\int \frac{x-2}{x^2+x}dx$ I = $- 2\,Lnx + 3\,Ln(x + 1) + C$

18. $\int \frac{x^3+4x^2-10x+7}{x^3-7x-6}dx$ I = $x - 5Ln(x + 1) + 7Ln(x + 2) + 2Ln(x - 3) + C$

19. $\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}dx$ I = $\frac{-2}{x+3}+\frac{1}{2(x+3)^2}+C$

20. $\int \frac{2+3x^2}{\sqrt{x}}dx$ I = $4\sqrt{x}+\frac{6}{5}\sqrt{x^5}+C$

21. $\int \frac{1}{x^2-x^3}dx$ I = $Ln\frac{x}{1-x}-1/x+C$

22. $\int \left(\frac{3-5x}{2}\right)^3 dx$

23. $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx$ I = $\frac{1}{2}Ln(x^2+2x+5)+\frac{3}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C$

24. $\int \frac{1}{3+x^2}dx$

25. $\int \frac{x}{x^3+2x-x^2-2}dx$ I = $\frac{1}{3}Ln(x-1)-\frac{1}{6}Ln(x^2+2)+\frac{\sqrt{2}}{3}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

26. $\int \frac{4x+4}{x^3-x^2-4x+4}dx$ I = $-\frac{8}{3}Ln(x-1)+3Ln(x-2)-\frac{1}{3}Ln(x+2)+C$

27. $\int \frac{x^2+2}{x^3-9x^2+27x-27}dx$ I = $Ln(x-3)-\frac{6}{x-3}-\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{(x-3)^2}+C$